



प्राकृतिक संख्याएँ एवं पूर्ण संख्याएँ

(Natural Numbers and Whole Numbers)

अध्याय के मुख्य बिंदु

♦ प्राकृतिक संख्याएँ ♦ पूर्ण संख्याएँ ♦ सम और विषम पूर्ण संख्याएँ ♦ संख्या शून्य ♦ पूर्ण संख्याओं के योग के गुण ♦ पूर्ण संख्याओं के व्यवकलन (घटाने) के गुण ♦ पूर्ण संख्याओं के गुणा के गुण ♦ पूर्ण संख्याओं के भाग के गुण।

प्राकृतिक संख्याएँ (Natural Numbers)

किसी भी मान को ठीक-ठीक व्यक्त करने के लिए हम जिन संख्याओं का प्रयोग करते हैं, उन्हें **प्राकृतिक संख्याएँ** कहते हैं। शून्य के अतिरिक्त सभी पूर्ण संख्याएँ प्राकृतिक संख्याएँ होती हैं।

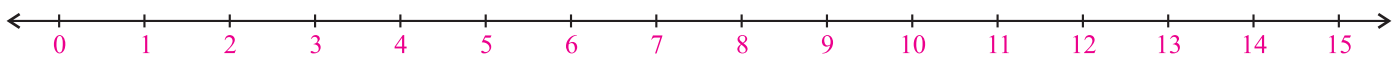
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 आदि प्राकृतिक संख्याएँ हैं। इन संख्याओं का गणनाओं में प्रयोग होने के कारण, इन संख्याओं को **गणन संख्याएँ** भी कहते हैं। इनको N से प्रदर्शित करते हैं।

पूर्ण संख्याएँ (Whole Numbers)

यदि हम प्राकृतिक संख्याओं के समूह में 0 को भी शामिल कर दें, तो हमें पूर्ण संख्याओं का समूह प्राप्त होता है। अतः शून्य सहित सभी प्राकृतिक संख्याओं को **पूर्ण संख्याएँ** कहते हैं।

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 आदि पूर्ण संख्याएँ हैं।

पूर्ण संख्याओं को संख्या रेखा पर प्रदर्शित करना- एक रेखा अपने किनारों पर अंतहीन होती है। पूर्ण संख्या उसके एक सिरे पर 0 से प्रारंभ होकर दूसरे किनारे तक अंतहीन रूप से बढ़ती है। हम पूर्ण संख्याओं को एक संख्या किरण द्वारा प्रदर्शित करते हैं।



हम देखते हैं कि संख्या रेखा पर पूर्ण संख्याएँ, जो अन्य पूर्ण संख्या के दाईं ओर हैं, पहली से बड़ी हैं।

दो क्रमागत पूर्ण संख्याओं के मध्य कोई पूर्ण संख्या नहीं पड़ती है। उदाहरण के लिए, 0 और 1 या 1 और 2 के मध्य कोई पूर्ण संख्या नहीं है।

सम और विषम पूर्ण संख्याएँ (Even and Odd Whole Numbers)

पूर्ण संख्याएँ दो प्रकार की होती हैं- सम और विषम।

जो पूर्ण संख्याएँ दो से विभाजित हो जाती हैं, उन्हें **सम पूर्ण संख्याएँ** कहते हैं। उदाहरण के लिए, 1 से 15 के बीच सम संख्याएँ— 2, 4, 6, 8, 10, 12 और 14 होंगी।

जो पूर्ण संख्याएँ दो से विभाजित नहीं होती हैं, उन्हें **विषम पूर्ण संख्याएँ** कहते हैं। उदाहरण के लिए, 1 से 15 के बीच विषम संख्याएँ— 3, 5, 7, 9, 11 और 13 होंगी।



- सबसे छोटी व प्राथमिक प्राकृतिक संख्या 1 है।
- शून्य सबसे प्रारंभिक पूर्ण संख्या है।

संख्या शून्य (The Number Zero)

शून्य अर्थात् कुछ नहीं अर्थात् खाली। शून्य को संकेत 0 द्वारा लिखा जाता है। शून्य मान रहित है अर्थात् इसका स्वयं का मान नहीं होता है। यह पूर्ण संख्या तो है किंतु प्राकृतिक संख्या नहीं है। अंक पद्धति में शून्य का विशेष महत्व है।



यदि हम दहाई या इससे अधिक की कोई संख्या लिखते हैं, तो शून्य की स्थिति संख्या के मान पर प्रभाव डालती है। 10 में से शून्य हटा लेने पर संख्या का मान 1 हो जाएगा, जोकि प्रारंभिक मान से दस गुणा कम होगा। इसी प्रकार यदि 10 में से एक शून्य दाईं ओर लग जाए तो संख्या का मान 100 हो जाएगा, जो कि प्रारंभिक मान से दस गुणा अधिक है अर्थात् दाईं ओर एक शून्य संख्या के मान में दस गुणा वृद्धि करता है। जबकि बाईं ओर एक शून्य संख्या को प्रभावित नहीं करता। अंकों के मध्य में स्थित शून्य भी संख्या को प्रभावित करता है। उदाहरण के लिए, 2008 में अंक 2 और 8 के मध्य दो शून्य हैं और संख्या का मान है— दो हजार आठ। यदि इसमें से दोनों शून्य हटा लें तो 28 बचेगा, जो प्रारंभिक संख्या का मान परिवर्तित कर रहा है। अतः अंकों के मध्य में स्थित शून्य का पूरा योगदान है और इसे हटाया नहीं जा सकता है।

शून्य से संबंधित महत्वपूर्ण तथ्य-

- शून्य की खोज भारतीय गणितज्ञों द्वारा की गई, जो संपूर्ण विश्व में गणित के क्षेत्र में की गई एक अमूल्य खोज है।
- शून्य पूर्ण संख्या का प्राथमिक अंक है।
- किसी संख्या की घात शून्य होने पर उसका मान सदैव एक होता है। (चाहे संख्या की प्रकृति धनात्मक हो या ऋणात्मक)
- योग संक्रिया में किसी भी अंक में शून्य का योग अंक को सदैव अपरिवर्तित रखता है; जैसे- $15 + 0 = 15$
- गुणन संक्रिया में किसी भी संख्या में शून्य का गुणा करने पर परिणाम सदैव शून्य ही होता है; जैसे- $15 \times 0 = 0$

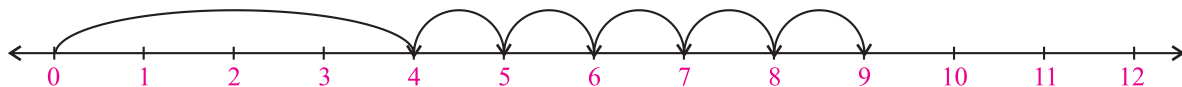
पूर्ण संख्याओं की संख्या रेखा पर संक्रियाएँ

पूर्ण संख्याओं की संक्रियाओं को संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है।

संख्या रेखा पर योग- योग की संक्रिया को संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है।

उदाहरण : 4 और 5 के योग को संख्या रेखा पर प्रदर्शित कीजिए।

हल : $4 + 5 = \boxed{?}$



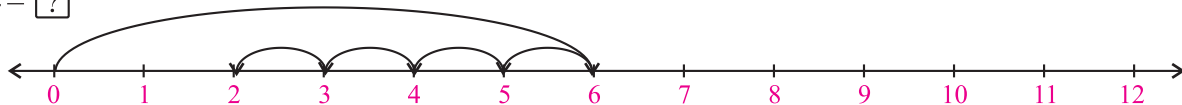
तीर की नोक बिंदु 4 पर है। 4 में 5 जोड़ने के लिए 4 से आगे दाईं ओर 5 कदम चलते हैं। पाँचवें कदम में अंतिम तीर की नोक 9 पर है।

अतः 4 और 5 का योग 9 है अर्थात् $4 + 5 = 9$

संख्या रेखा पर व्यवकलन (घटाना)- व्यवकलन योग की विपरीत संक्रिया है। व्यवकलन की संक्रिया को संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है।

उदाहरण : 6 में से 4 को संख्या रेखा की सहायता से घटाइए।

हल : $6 - 4 = \boxed{?}$



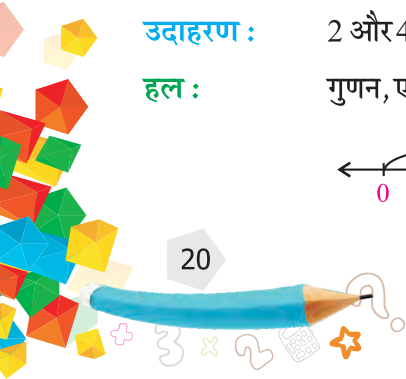
तीर की नोक बिंदु 6 पर है। 6 से प्रारंभ करके 4 घटाने के लिए बाईं ओर 4 कदम चलते हैं। चौथे कदम में अंतिम तीर की नोक 2 पर है।

अतः $6 - 4 = 2$

संख्या रेखा पर गुणन- दो पूर्ण संख्याओं की गुणन की संक्रिया को संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है।

उदाहरण : 2 और 4 की गुणा को संख्या रेखा पर प्रदर्शित कीजिए।

हल : गुणन, एक संख्या को बार-बार जोड़ने की लघु विधि है अर्थात् गुणन एक बारंबार योग है।





0 से प्रारंभ करके दाईं ओर एक बार में 2 इकाइयाँ बढ़ते हैं। इस प्रकार एक कदम में दो इकाइयाँ बढ़ते हुए 4 कदम चलते हैं। चौथे कदम में हम 8 पर पहुँचते हैं।

अतः $2 \times 4 = 8$

संख्या रेखा पर भाग- भाग, गुणन की विपरीत संक्रिया है। दो पूर्ण संख्याओं के भाग की संक्रिया को संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है।

उदाहरण : 9 को 3 से भाग देने की संक्रिया को संख्या रेखा पर प्रदर्शित कीजिए।

हल : भाग किसी संख्या को बार-बार घटाने की लघु विधि है अर्थात् भाग एक बार-बार व्यवकलन (घटाना) है।



9 से प्रारंभ करके एक बार में 3 इकाइयाँ बाईं ओर बढ़ते हैं। हम तब तक बाईं ओर आगे बढ़ते हैं जब तक कि हम शून्य पर नहीं पहुँच जाते। अंत में, चले गए कदमों को गिन लेते हैं।

अतः $9 \div 3 = 3$



1. सबसे छोटी प्राकृतिक संख्या लिखिए।
2. सबसे छोटी पूर्ण संख्या लिखिए।
3. 91 और 111 के मध्य कितनी पूर्ण संख्याएँ आती हैं?
4. क्या सभी प्राकृतिक संख्याएँ पूर्ण संख्याएँ होती हैं?
5. क्या सबसे बड़ी प्राकृतिक संख्या ज्ञात करना संभव है?
6. 50 और 70 के मध्य की सभी पूर्ण संख्याएँ लिखिए।
7. 151 और 161 के मध्य की सभी विषम पूर्ण संख्याएँ लिखिए।
8. संख्या रेखा का उपयोग करके जोड़िए-

(क) $1 + 5$	(ख) $2 + 6$	(ग) $5 + 4$
-------------	-------------	-------------
9. संख्या रेखा का उपयोग करके घटाइए-

(क) $7 - 3$	(ख) $12 - 5$	(ग) $9 - 4$
-------------	--------------	-------------
10. संख्या रेखा का उपयोग करके गुणा कीजिए-

(क) 2×5	(ख) 3×3	(ग) 4×2
------------------	------------------	------------------
11. संख्या रेखा का उपयोग करके भाग कीजिए-

(क) $8 \div 2$	(ख) $12 \div 4$	(ग) $10 \div 5$
----------------	-----------------	-----------------

पूर्ण संख्याओं के योग का गुण (Properties of Addition of Whole Numbers)

संवरक गुण- किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं का योग भी एक पूर्ण संख्या ही होता है।

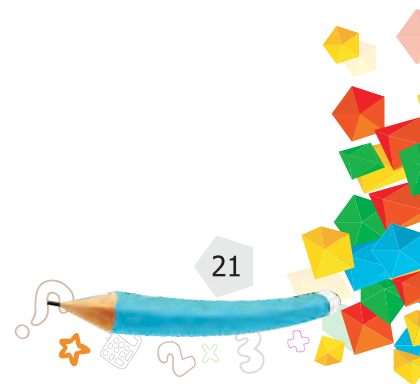
“यदि a तथा b दो पूर्ण संख्याएँ हैं, तो $a + b$ भी एक पूर्ण संख्या होगी।”

जैसे- $6 + 5 = 11$ और $15 + 6 = 21$

क्रम विनिमेय गुण- किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ने पर योगफल समान ही रहता है।

“यदि a तथा b दो पूर्ण संख्याएँ हैं, तो $a + b = b + a$ होगा।”

जैसे- $4 + 7 = 11$ और $7 + 4 = 11$ अतः $4 + 7 = 7 + 4 = 11$





साहचर्य गुण- तीन या अधिक पूर्ण संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ने पर योगफल समान रहता है।

“यदि a, b तथा c तीन पूर्ण संख्याएँ हैं, तो $a + (b + c) = (a + b) + c$ होगा।”

जैसे- $3 + (4 + 5) = 3 + 9 = 12$ और $(3 + 4) + 5 = 7 + 5 = 12$

अतः $3 + (4 + 5) = (3 + 4) + 5 = 12$

योग तत्समक गुण- किसी भी पूर्ण संख्या में 0 जोड़ने पर योगफल वही पूर्ण संख्या रहती है।

“यदि a एक पूर्ण संख्या हो, तो $a + 0 = 0 + a = a$ होगा।”

जैसे- $143 + 0 = 143$ और $2851 + 0 = 2851$

शून्य को योग का तत्समक अवयव कहते हैं।

उदाहरण : उचित पुनः स्थापन द्वारा निम्नलिखित का योग ज्ञात कीजिए। योग में प्रयुक्त गुण भी लिखिए।

(क) $1637 + 1305 + 363$

(ख) $2062 + 353 + 1438 + 547$

हल : (क) $1637 + 1305 + 363$

पहली संख्या में 7 इकाई स्थान पर है तथा तीसरी संख्या में 3 इकाई स्थान पर है, 7 तथा 3 को जोड़ने पर 10 प्राप्त होता है, जिससे इकाई के स्थान पर 0 प्राप्त होता है। अतः पहले हम क्रम विनिमेय करते हैं फिर साहचर्य करते हैं।

$$1637 + 1305 + 363$$

$$= 1637 + 363 + 1305$$

(क्रम विनिमेय गुण द्वारा)

$$= (1637 + 363) + 1305$$

(साहचर्य गुण द्वारा)

$$= 2000 + 1305 = 3305$$

उत्तर

(ख) $2062 + 353 + 1438 + 547$

$$= 2062 + 1438 + 353 + 547$$

(क्रम विनिमेय गुण द्वारा)

$$= (2062 + 1438) + (353 + 547)$$

(साहचर्य गुण द्वारा)

$$= 3500 + 900 = 4400$$

उत्तर



प्रश्नावली- 2.2

1. निम्नलिखित संख्याओं में जोड़ की संक्रिया से क्रम विनिमेय नियम की पुष्टि कीजिए-

(क) $2345 + 67089$

(ख) $135 + 24689$

2. निम्नलिखित योग के परिणाम ज्ञात कीजिए और योग की संक्रिया के साहचर्य गुण की पुष्टि कीजिए-

(क) $(15409 + 112) + 591$

(ख) $(2359 + 641) + 10000$

3. गणना कीजिए- (उचित पुनर्व्यवस्था का प्रयोग करें।)

(क) $18 + 5 + 2 + 6$

(ख) $637 + 908 + 363$

4. एक विद्यार्थी ने $5 + 34 + 25 + 36$ के स्थान पर $5 + 25 + 34 + 36$ लिखा। विद्यार्थी ने कौन-से गुण का प्रयोग किया?

5. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

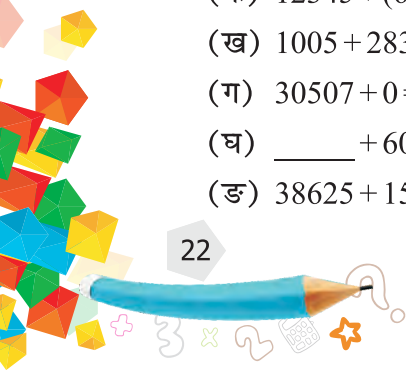
(क) $12345 + (679 + 321) = (12345 + \underline{\hspace{2cm}}) + 321$

(ख) $1005 + 283 = \underline{\hspace{2cm}} + 1005$

(ग) $30507 + 0 = \underline{\hspace{2cm}}$

(घ) $\underline{\hspace{2cm}} + 605 = 605$

(ङ) $38625 + 15259 + 42659 = (\underline{\hspace{2cm}} + 15259) + 42659$





पूर्ण संख्याओं के व्यवकलन (घटाने) के गुण (Properties of Subtraction of Whole Numbers)

संवरक गुण- “यदि a और b पूर्ण संख्याएँ हैं और $a \geq b$ तब ही घटाने की संक्रिया में संवरक गुण संभव है अन्यथा नहीं।”

जैसे- $14 - 6 = 8$ (पूर्ण संख्या) क्योंकि $14 > 6$

$6 - 14 = -8$ (पूर्ण संख्या नहीं है) क्योंकि $6 < 14$

क्रम विनिमय गुण- घटाने की संक्रिया में यह गुण नहीं होता है। “यदि a और b पूर्ण संख्याएँ हैं, तब $a - b, b - a$ के समान नहीं है।”

$11 - 5 = 6$ तथा $5 - 11 = -6$

चूँकि $6 \neq -6$ अतः $11 - 5 \neq 5 - 11$

साहचर्य गुण- घटाने की संक्रिया में यह गुण नहीं होता है।

“यदि a, b तथा c पूर्ण संख्याएँ हैं और $c \neq 0$ तब $(a - b) - c, a - (b - c)$ के समान नहीं है।”

यदि $a = 30, b = 14$ तथा $c = 4$ हो, तो

$(30 - 14) - 4 = 16 - 4 = 12$ तथा

$30 - (14 - 4) = 30 - 10 = 20$

अतः $(30 - 14) - 4 \neq 30 - (14 - 4)$

शून्य का गुण- यदि किसी पूर्ण संख्या में से 0 को घटाया जाए, तो स्वयं वही संख्या प्राप्त होती है।

जैसे- $(25 - 0) = 25$ तथा $(0 - 25) = -25$ (पूर्ण संख्या नहीं है)

अतः घटाने की संक्रिया में ‘तत्समक’ लागू नहीं होता।



प्रश्नावली- 2.3

1. $(a - b) \neq (b - a)$ को सत्यापित कीजिए-

(क) 112, 62

(ख) 439, 122

(ग) 170, 230

2. $a - (a - b) \neq (a - b) - c$ को सत्यापित कीजिए-

(क) 210, 410, 310

(ख) 685, 965, 325

(ग) 225, 710, 445

3. निम्नलिखित को घटाइए-

(क) $73218 - 46006$

(ख) $29811 - 23541$

(ग) $543691 - 55324$

4. पाँच अंकों की सबसे बड़ी और छह अंकों की सबसे छोटी संख्या का अंतर ज्ञात कीजिए।

5. निम्न में * के स्थान पर सही अंक लिखिए-

(क)
$$\begin{array}{r} 5376 \\ - **59 \\ \hline 25** \end{array}$$

(ख)
$$\begin{array}{r} 600230 \\ - 48***6 \\ \hline *17024 \end{array}$$

(ग)
$$\begin{array}{r} 57*9 \\ - **46 \\ \hline 368* \end{array}$$

पूर्ण संख्याओं की गुणा के गुण (Properties of Multiplication of Whole Numbers)

गुणा की प्रक्रिया लगातार योग की प्रक्रिया है, अतः योग के प्रगुण गुणा के लिए भी सत्य प्रमाणित होते हैं।

संवरक गुण- दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल एक पूर्ण संख्या होती है।

“यदि a और b पूर्ण संख्याएँ हैं, तो $a \times b = c$, जहाँ c भी एक पूर्ण संख्या होती है।”

जैसे- $4 \times 6 = 24$





क्रम विनिमेय गुण- दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल किसी भी क्रम में करने पर समान रहता है।

“यदि a और b पूर्ण संख्याएँ हैं, तो $a \times b = b \times a$ ”

जैसे- $15 \times 5 = 75,$ $5 \times 15 = 75$

अतः $15 \times 5 = 5 \times 15$

साहचर्य गुण- किसी समूह में तीन या अधिक पूर्ण संख्याओं का गुणनफल समान रहता है।

“यदि a, b, c कोई तीन पूर्ण संख्याएँ हैं, तो $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ ”

जैसे- $(3 \times 4) \times 5 = 12 \times 5 = 60$

$3 \times (4 \times 5) = 3 \times 20 = 60$

अतः $(3 \times 4) \times 5 = 3 \times (4 \times 5)$

गुणात्मक तत्समक गुण- किसी भी पूर्ण संख्या में 1 की गुणा करने पर गुणनफल वही संख्या रहती है।

“यदि a एक पूर्ण संख्या है, तो $a \times 1 = a$ ”

जैसे- $25 \times 1 = 25$

1 को गुणन का तत्समक अवयव कहते हैं।

शून्य की गुणन विशेषता - किसी भी पूर्ण संख्या में 0 से गुणा करने पर गुणनफल शून्य आता है।

“यदि a एक पूर्ण संख्या है, तो $a \times 0 = 0 \times a = 0$ ”

जैसे- $12 \times 0 = 0,$ $0 \times 12 = 0$

अतः $12 \times 0 = 0 \times 12 = 0$

शून्य का योग पर वितरण नियम-

“यदि a, b और c तीन पूर्ण संख्याएँ हैं तो $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ ”

जैसे- $4 \times (5 + 6) = 4 \times 11 = 44,$

$4 \times 5 + 4 \times 6 = 20 + 24 = 44$

अतः $4 \times (5 + 6) = 4 \times 5 + 4 \times 6$

यह नियम तीन से अधिक संख्याओं पर भी सत्य सिद्ध होता है।

$$a \times (b + c + d + e) = a \times b + a \times c + a \times d + a \times e$$

गुणा का घटाव पर वितरण नियम-

“यदि a, b और c तीन पूर्ण संख्याएँ हैं और $b > c$, तो

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

जैसे- $8 \times (5 - 3) = 8 \times 2 = 16$

$8 \times 5 - 8 \times 3 = 40 - 24 = 16$

अतः $8 \times (5 - 3) = 8 \times 5 - 8 \times 3$

उदाहरण : उपयुक्त क्रम का प्रयोग करते हुए, निम्न के गुणनफल ज्ञात कीजिए-

(क) $25 \times 575 \times 4$

(ख) $125 \times 40 \times 8 \times 25$

हल : चूँकि संख्याओं की गुणा किसी भी क्रम में की जा सकती है, अतः हम उन संख्याओं को एक साथ रखते हैं, जिनके गुणनफल में शून्य आता हो। शून्यों के साथ शेष बची संख्याओं में संख्या की आगे गुणा सरल होती है।

(क) $25 \times 575 \times 4$

$= 25 \times 4 \times 575$

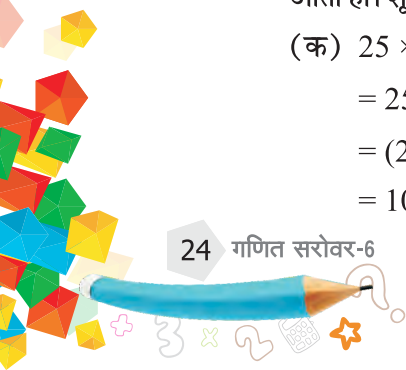
$= (25 \times 4) \times 575$

$= 100 \times 575 = 57500$

(क्रम विनिमेय गुण)

(साहचर्य गुण)

उत्तर





$$\begin{aligned} \text{(ख)} \quad & 125 \times 40 \times 8 \times 25 \\ & = 125 \times 8 \times 40 \times 25 \quad \text{(क्रम विनिमेय गुण)} \\ & = 1000 \times 1000 = 10,00,000 \quad \text{उत्तर} \end{aligned}$$

उदाहरण : वितरण गुण के प्रयोग से निम्न के गुणनफल ज्ञात कीजिए-

$$\text{(क)} \quad 225 \times 104 \qquad \text{(ख)} \quad 125 \times 92$$

$$\begin{aligned} \text{हल :} \quad & \text{(क)} \quad 225 \times 104 = 225 \times (100 + 4) = 225 \times 100 + 225 \times 4 \\ & = 22500 + 900 = 23,400 \quad \text{उत्तर} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{(ख)} \quad 125 \times 92 = 125 \times (100 - 8) \\ & = 125 \times 100 - 125 \times 8 \\ & = 12500 - 1000 = 11,500 \quad \text{उत्तर} \end{aligned}$$

उदाहरण : $472 \times 6 + 472 \times 3 + 472$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल :} \quad & 472 \times 6 + 472 \times 3 + 472 \\ & = 472 \times 6 + 472 \times 3 + 472 \times 1 \\ & = 472 \times (6 + 3 + 1) \quad \text{(वितरण नियम)} \\ & = 472 \times 10 = 47200 \quad \text{उत्तर} \end{aligned}$$

उदाहरण : $665 \times 10 + 461 - 361 \times 6650$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल :} \quad & 665 \times 10 + 461 - 361 \times 6650 \\ & = (665 \times 10) \times 461 - 361 \times 6650 \quad \text{(क्रम विनिमेय गुण)} \\ & = 6650 \times 461 - 6650 \times 361 \\ & = 6650 \times (461 - 361) \\ & = 6650 \times 100 = 6,65,000 \quad \text{उत्तर} \end{aligned}$$



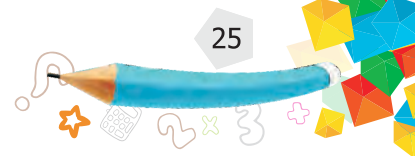
प्रश्नावली- 2.4

- निम्नलिखित को सत्य सिद्ध करने के लिए रिक्त स्थानों में उचित पूर्ण संख्या भरिए-
 (क) $34512 \times 1 = \underline{\hspace{2cm}}$ (ख) $62518 \times 0 = \underline{\hspace{2cm}}$ (ग) $572 \times 48 = 48 \times \underline{\hspace{2cm}}$
 (घ) $16 \times 104 = 16 \times (100 + \underline{\hspace{2cm}})$ (ङ) $38 \times 95 = 38 \times (100 - \underline{\hspace{2cm}})$
- $25 \times 8 \times 40 \times 125$ का गुणनफल उपयुक्त क्रम द्वारा ज्ञात कीजिए।
- वितरण गुण का प्रयोग करके गुणनफल ज्ञात कीजिए-
 (क) 995×275 (ख) 258×1008
- $2115 \times 2115 - 2115 \times 115$ का मान उचित गुणों का प्रयोग करके ज्ञात कीजिए।
- $(425 \times 48) + (425 \times 16) - (425 \times 35) - (425 \times 9)$ का मान उचित गुणों का प्रयोग करके ज्ञात कीजिए।

पूर्ण संख्याओं के भाग के गुण (Properties of Division of Whole Numbers)

संवरक गुण- भाग की संक्रिया में संवरक गुण संतुष्ट नहीं होता है। “यदि a और b पूर्ण संख्याएँ हैं, तो $a \div b$ एक पूर्ण संख्या हो भी सकती है और नहीं भी हो सकती।”

$$\begin{aligned} \text{जैसे-} \quad & 8 \div 2 = 4 \quad \text{(पूर्ण संख्या)} \\ & 8 \div 3 = 8/3 \quad \text{(पूर्ण संख्या नहीं)} \end{aligned}$$





शून्य द्वारा भाग- किसी भी पूर्ण संख्या को शून्य से भाग नहीं दिया जा सकता है, क्योंकि वह अर्थहीन होता है।

शून्य को पूर्ण संख्या द्वारा भाग- शून्य को किसी भी पूर्ण संख्या से भाग देने पर भागफल शून्य ही आता है।

“यदि a एक पूर्ण संख्या है, तो $0 \div a = 0$ होगा।”

जैसे- $0 \div 8 = 0$

समान अशून्य पूर्ण संख्या को समान अशून्य पूर्ण संख्या द्वारा भाग- समान अशून्य पूर्ण संख्या को समान अशून्य पूर्ण संख्या से भाग देने पर भागफल सदैव 1 आता है।

“यदि a एक अशून्य पूर्ण संख्या है, तो $a \div a = 1$ होगा।”

जैसे- $52 \div 52 = 1$

अशून्य पूर्ण संख्या को 1 द्वारा भाग- किसी अशून्य पूर्ण संख्या को 1 से भाग देने पर वही संख्या आती है।

“यदि a एक अशून्य पूर्ण संख्या है, तो $a \div 1 = a$ होगा।”

जैसे- $95 \div 1 = 95$

विभाजन नियम- किसी संख्या का अन्य संख्या से विभाजन का नियम है-

$$\text{भाज्य} = \text{भाजक} \times \text{भागफल}, \text{ जबकि शेषफल} < \text{भाजक}$$

जैसे- $1000 \div 35$ तो भागफल 28 और शेषफल 20 है।

$$1000 = 35 \times 28 + 20 \quad [\text{जबकि शेषफल (20) < भाजक (35)}]$$

अन्य गुण- 1. पूर्ण संख्याओं के लिए भाग क्रम विनिमय नहीं होता।

जैसे- माना दो पूर्ण संख्याएँ 8 और 4 हैं।

$$8 \div 4 = 2, \quad 4 \div 8 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

अतः $8 \div 4$ और $4 \div 8$ समान नहीं हैं।

2. पूर्ण संख्याओं के भाग के लिए साहचर्य प्रगुण सत्य नहीं है।

$$\text{जैसे- } (75 \div 15) \div 3 = 5 \div 3 = \frac{5}{3}$$

$$75 \div (15 \div 3) = 75 \div 5 = 15$$

अतः $(75 \div 15) \div 3$ और $75 \div (15 \div 3)$ समान नहीं हैं।

उदाहरण : $69,143 \div 45$ को हल कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{r} 45 \overline{) 69143} (1536 \\ \underline{-45} \\ 241 \\ \underline{-225} \\ 164 \\ \underline{-135} \\ 293 \\ \underline{-270} \\ 23 \end{array}$$

भागफल = 1536 और शेषफल = 23 **उत्तर**

उदाहरण : वह संख्या ज्ञात कीजिए, जो 22 से विभाजित होने पर भागफल 18 और शेष 15 दे।

हल :

$$\begin{aligned} \text{भाज्य} &= \text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेष} \\ &= 22 \times 18 + 15 \\ &= 396 + 15 = 411 \end{aligned}$$

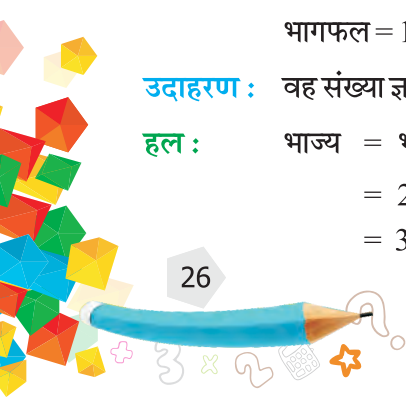
उत्तर

पुष्टि- भाज्य = भाजक \times भागफल + शेष

$$\begin{aligned} 69,143 &= 45 \times 1536 + 23 \\ &= 69,120 + 23 \\ &= 69143 \end{aligned}$$



केवल 1 ऐसी पूर्ण संख्या है, जिसका भाज्य, भाजक और भागफल समान है।
अर्थात् $1 \div 1 = 1$





प्रश्नावली- 2.5

1. रिक्त स्थान भरिए-

(क) $257 \div 0 = \underline{\hspace{2cm}}$

(ख) $825 \div \underline{\hspace{2cm}} = 825$

(ग) $163 \div 163 = \underline{\hspace{2cm}}$

(घ) $436 \div 1 = \underline{\hspace{2cm}}$

(ङ) $0 \div 303 = \underline{\hspace{2cm}}$

(च) $765 \div \underline{\hspace{2cm}} = \text{अर्थहीन है।}$

2. भागफल तथा शेष प्राप्त कीजिए-

(क) $1947 \div 32$

(ख) $15035 \div 100$

(ग) $95234 \div 215$

3. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए-

(क) $476 + (620 \div 62)$

(ख) $72450 \div (583 - 58)$

(ग) $694 - (625 \div 25)$

(घ) $(15625 \div 125) \div 125$

4. एक ऐसी संख्या ज्ञात कीजिए, जो 35 से विभाजित होने पर भागफल 20 तथा शेष 18 दे।

5. क्या कोई पूर्ण संख्या n है, जिसके लिए $n \div n = n$ सत्य हो?

6. यदि p और q अशून्य पूर्ण संख्याएँ हैं, तो बताइए कि क्या $p \div q = q \div p$ सत्य है? उदाहरण भी दीजिए।

सारांश



- गिनती की जाने वाली संख्याएँ 1, 2, 3, को प्राकृतिक संख्याएँ कहते हैं।
- शून्य सहित सभी प्राकृतिक संख्याओं को पूर्ण संख्याएँ कहते हैं।
- शून्य की खोज भारतीय गणितज्ञों द्वारा की गई।
- पूर्ण संख्याएँ योग और गुणा में संवरक गुण रखती हैं, किंतु घटा व भाग के लिए संवरक गुण नहीं रखती हैं।
- जोड़ तथा गुणा पूर्ण संख्याओं के लिए साहचर्य होती हैं।
- पूर्ण संख्याओं में घटा और भाग के लिए क्रम विनिमेय तथा साहचर्य गुण नहीं पाया जाता है।
- विभाजन नियम- भाज्य = भाज्य \times भागफल + शेषफल
जबकि, शेषफल $<$ भागफल

बहुविकल्पीय प्रश्न (MCQs)

1. सबसे छोटी पूर्ण संख्या है-

(क) 0

(ख) 1

(ग) 2

(घ) कोई नहीं

2. 32 तथा 53 के मध्य कितनी पूर्ण संख्याएँ हैं?

(क) 22

(ख) 21

(ग) 20

(घ) कोई नहीं

3. पूर्ण संख्याओं का गुणनात्मक तत्समक है-

(क) 2

(ख) 1

(ग) 0

(घ) कोई नहीं

4. $(5 \times 9) \times 7 = 5 \times (9 \times 7)$ गुण दर्शाता है-

(क) संवरक

(ख) क्रम विनिमेय

(ग) साहचर्य

(घ) कोई नहीं

5. यदि a एक पूर्ण संख्या है, तो $\frac{a}{0} = ?$

(क) 0

(ख) a

(ग) अर्थहीन

(घ) कुछ नहीं





बौद्धिक गणित (Mental Maths)

1. 2, 4, 6, 8 आदि कैसी संख्याएँ हैं ?
2. जो प्राकृतिक संख्याएँ 2 से विभाजित नहीं होती हैं, उन्हें क्या कहते हैं?
3. दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल शून्य है। अनुमान से बताइए कि संख्याएँ कौन-सी हैं?
4. 530 और 503 में बताइए कि संख्या रेखा पर कौन-सी संख्या दाईं ओर है और कौन-सी बाईं ओर?



प्रयोगात्मक क्रियाकलाप LAB ACTIVITY

उद्देश्य- पूर्ण संख्याओं के योग के क्रम विनिमेय प्रगुण को दर्शाना।

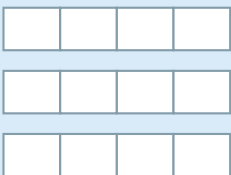
आवश्यक सामग्री- वर्गाकार लाइनों वाली शीट, कैंची।

प्रक्रिया-

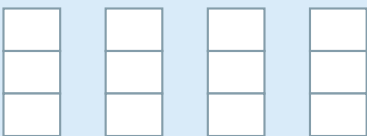
- (i) वर्गाकार लाइनों वाली शीट से समान आकार (माना 4×3) के दो टुकड़े काटिए।



- (ii) पहले टुकड़े को 4 वर्गों वाली 3 समान पट्टियों में काटिए।



- (iii) दूसरे टुकड़े को 3 वर्गों वाली 4 समान पट्टियों में काटिए।



- (iv) प्रत्येक 4 वर्गों वाली 3 पट्टियाँ

$$3 \text{ चौके} = 12$$

$$3 \times 4 = 12$$

- प्रत्येक 3 वर्गों वाली 4 पट्टियाँ

$$4 \text{ तिरे} = 12$$

$$4 \times 3 = 12$$

